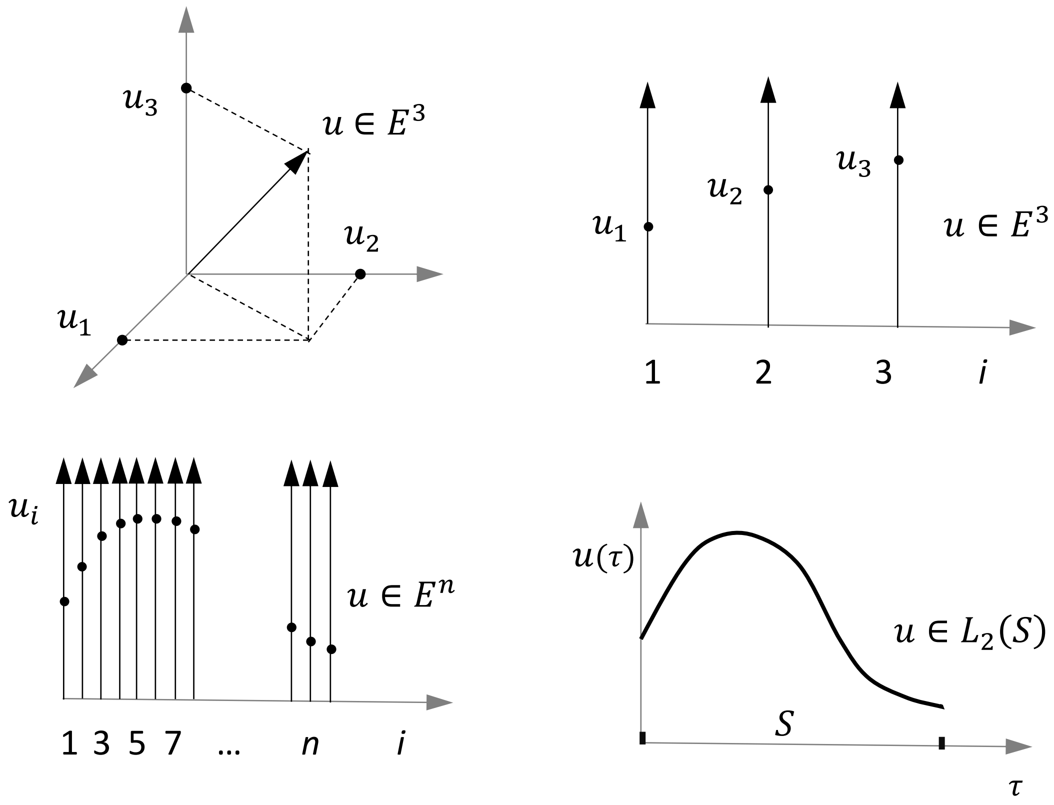
По материалам книги (рабочий вариант) Толстых В.К. Практическая оптимизация, идентификация распределённых систем

Бесконечномерное управление

Переход от **вектора** управления $u \in E^n$, при $n \to \infty$ в бесконечномерное пространство, к **функции** управления $u(\tau) \in L_2(S)$. где $\tau \in S$ – пространственно-временная координата управления, S – область определения управления.

Переход в бесконечномерное пространство:



- Пространства E^n и L_2 – **евклидовы** (в них определено скалярное произведение):

$$\langle a, b\rangle_{E^n} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\,, \qquad \langle a, b\rangle_{L_2(s)} = \int_S ab\, dS,$$

- и **банаховы**, где норма (величина элементов, расстояние между ними):

$$\|a\|_{E^n} = \sqrt{\langle a, a\rangle_{E^n}}, \qquad \|a\|_{L_2(s)} = \sqrt{\langle a, a\rangle_{L_2(s)}}.$$

Целевой функционал
(Критерий качества оптимального управления)

- Если некоторому числу τ ставится в соответствие по правилу f число u, то говорят, что задана **функция** $u = f(\tau)$.

- Если же функции $u(\tau)$ ставится в соответствие число J, то говорят, что задан **функционал** $J(u)$. Число $J(u)$ называется значением функционала J на элементе u.

Обычно функционалы представляют собой определённые интегралы от функций, например, для $u(x)$, $S = (0,1)$. (**В обозначениях книги** – τ, **в лабораторных** – x)

$$J(u) = \int_0^1 [(u-5)u + 2u]dx,$$

- **Линейный функционал**[1] – если число $J(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1 J(u_1) + a_2 J(u_2)$.
- **Квадратичный функционал**[2] определяется формой:

$$J(u) = \Phi(u,u) + l(u) \in E,$$

где $\Phi(u,u)$ – *билинейный функционал*; $l(u)$ – линейный функционал. Блинейность означает, что $\Phi(u,u)$ – линейный относительно первого и второго аргумента. Примером квадратичного функционала является скалярное произведение $\langle u,u \rangle_{L_2}$.

Задача оптимизации
(задача оптимального управления)

Найти функцию-управление (оптимальное управление) $u(\tau) = u_*(\tau)$ на S, которая минимизирует целевой функционал:

$$u_* = arg\min J(u)$$

Это – прямой экстремальный подход в теории оптимального управления.

---

[1] Аналогично линейной функции, он обладает однородностью и аддитивностью.
[2] Аналогично квадратичной функции, т.е. параболе. Предложите свой квадратичный функционал.

Градиент целевого функционала

Градиент определяет главную линейную часть приращения функционала. Из ряда Тейлора следует:

$$\Delta J = J(u+\delta u) - J(u) = \langle \nabla J(u), \delta u \rangle_{L_2(s)} + o(\|\delta u\|),$$

Первая вариация δJ

δu – **вариация управления** (небольшое изменение, отклонение).

Первая вариация функционала:

$$\delta J = \langle \nabla J(u), \delta u \rangle_{L_2(s)}.$$

Градиент функционала

Например, если $u(x)$ и $J(u) = \int_S [(u-5)u + 2u]dx$, тогда

$$\delta J = \int_0^1 [(u-5)u+2u]'_u \delta u dx$$

$$\equiv \langle [(u-5)u+2u]'_u \;,\; \delta u \rangle_{L_2(s)}$$

Можно представить как скалярное произведение в $L_2(s)$

$$= \langle [u^2 - 3u]'_u, \delta u \rangle_{L_2(s)} = \langle 2u - 3, \delta u \rangle_{L_2(s)}.$$

Следовательно, **градиент**

$$\nabla J(u; x) = 2u(x) - 3 \;\in L_2(S), \qquad x \in S = (0,1).$$

Необходимое условие оптимальности (**НУО**):

$$\|\nabla J(u_*)\|_{L_2(s)} = 0.$$

Бесконечномерный градиентный метод наискорейшего спуска (МНС)

$$u^{k+1}(\tau) = u^k(\tau) - b^k \nabla J(u^k; \tau), \qquad \tau \in S, \;\; k = 0,1 \ldots$$

$$b^k = arg \min_{b>0} J(u^k - b\nabla J^k) - \text{минимизация одномерной функции } J(b).$$

Сравните с конечномерным МНС:

$$u_i^{k+1} = u_i^k - b^k \nabla_i J(u^k), \qquad i = 1 \ldots n, \;\; k = 0,1 \ldots$$

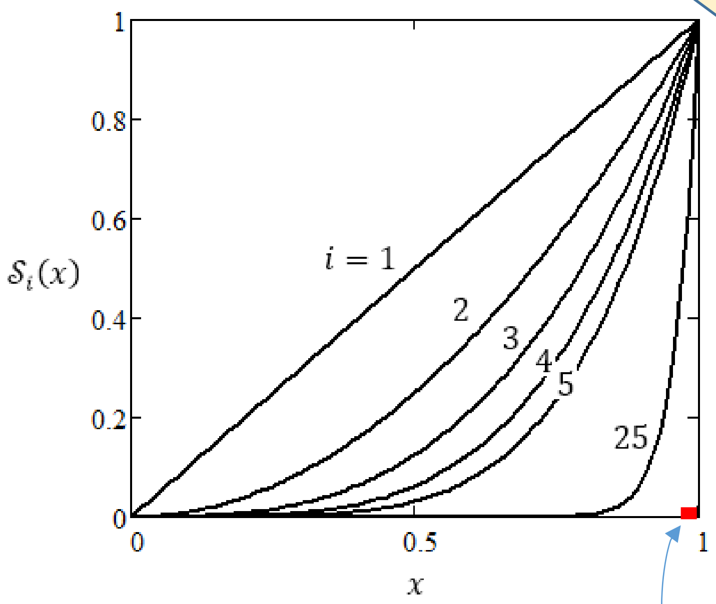
Бесконечномерный **МНС** не гарантирует ***равномерную*** сходимость к оптимуму. **Например**, ряд $\mathcal{S}_i(x) = x^i$ на отрезке $[0,1]$ при $i \to \infty$.

Предел нормы $\lim\limits_{i\to\infty} \|\mathcal{S}_i(x)\|_{L_2[0,1]} = 0$, но $\lim\limits_{i\to\infty} \|\mathcal{S}_i(x)\|_{C[0,1]} = \lim\limits_{i\to\infty} \max\limits_{x\in[0,1]} |\mathcal{S}_i(x)| = 1$.

Пространство функций, интегрируемых с квадратом

Поточечно

Пространство непрерывных функций



Для равномерной сходимости надо «выбросить» точку $x = 1$ вместе с малой окрестностью ненулевой меры (интеграл от окрестности не равен нулю).

Метод с регулируемым направлением спуска

$$u^{k+1}(\tau) = u^k(\tau) - b^k \alpha(\tau) \nabla J(u^k; \tau), \qquad \tau \in S,\ \ k = 0,1 \ldots$$

где $\alpha(\tau) \in L_{2+}(S)$ – параметр регулирования направления спуска. Принимает значения в положительном полупространстве $L_{2+} = \{\alpha \in L_2(S) \mid 0 < \alpha(\tau) < \infty \ \ \forall\tau \in S\}$.

Регулирование направления спуска

Решение задачи оптимизации следует начинать с параметром $\alpha = 1$, т.е. с тестирования ситуации посредством МНС.

Для выбора $\alpha(\tau)$ необходимо использовать ***шаблонные*** приближения $\tilde{u}^0$ на первой итерации:

$$\alpha(\tau) = \left| \frac{\tilde{u}^0(\tau) - u^0(\tau)}{\nabla J(u^0; \tau)} \right|, \qquad \operatorname{sgn} \nabla J(u^0; \tau) = const \ \text{ на } S.$$

Идея шаблонов

Шаблонный шаг $|\tilde{u}^0 - u^0|$ должен быть заметным для всех $\tau \in S$ и он должен приводить к так же заметным изменениям градиента, т.е. $|\nabla J(\tilde{u}^0;\tau) - \nabla J(u^0;\tau)|$ должно быть заметным для всех $\tau \in S$.

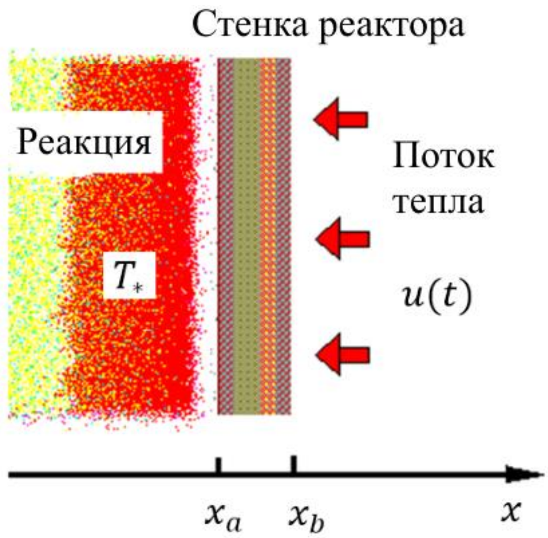
Вариант шаблона (при условии $\operatorname{sign} \nabla J(u^0;\tau) = const$)

- шаг «под 45°»:

$$\tilde{u}^0(\tau) = u^0(\tau) \pm \delta \quad \Rightarrow \quad \alpha(\tau) = \left|\frac{\delta}{\nabla J(u^0;\tau)}\right|, \ \ \tau \in S,$$

В конечномерном случае 45° – это компоненты вектора $u_i^0 = \delta \ \forall i$

Пример. Задача оптимального управления тепловыми процессами (раздел 5)



Управление – это поток тепла $u(t) \in L_2(S)$, $S = x_b \times (t_0, t_1)$ на границе x_b в реактор для удержания заданной температуры T_* внутри реактора:

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} [T(x_a, t) - T_*]^2 dt.$$

Критерий качества управления (целевой функционал) J зависит от управления u неявно, через дифференциальное уравнение в частных производных:

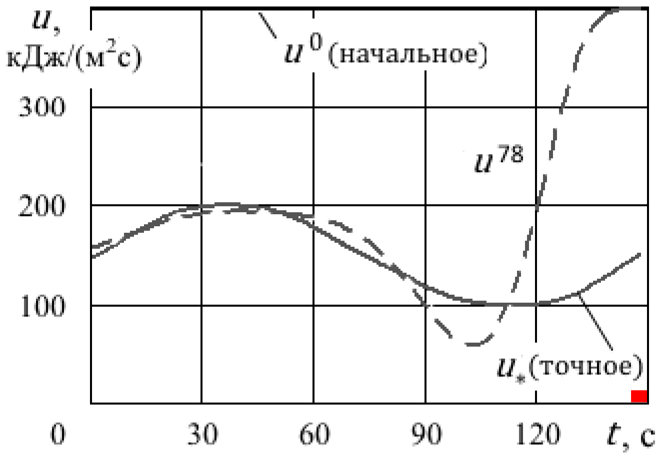
$$C\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \qquad (x,t) = \tau,$$

Граничные условия:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q \;\text{ на }\; x_a \times (t_0, t_1), \qquad \lambda \frac{\partial T}{\partial x} = u \;\text{ на }\; S = x_b \times (t_0, t_1).$$

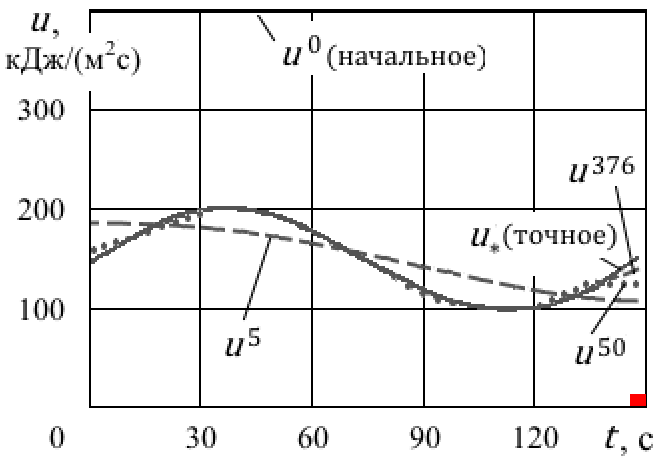
Оптимизация МНС

$\|u^0 - u_*\|$=3·10^6, J^0=4.1·10^4



Сходимость прекратилась на $k = 78$, $\|u^{78} - u_*\|$=1.21·10^6, J^{78}=0.9.

Оптимизация МРНС



$$\alpha(t) = \left| \frac{0.2u^0}{\nabla J(u^0; t)} \right|, \quad t \in S.$$

Сходимость прекратилась на $k = 376$, $\|u^{376} - u_*\|$=2.3·10^4 , J^{376}=1.4·10^{-5}.